Cálculo II

Examen X

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen X

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2016-17.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial 2.

Ejercicio 1 (3 puntos). Enuncia con precisión el Teorema Fundamental del Cálculo. Demuéstralo.

Ejercicio 2 (3 puntos). Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

1. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava hacia arriba, entonces $f \circ f$ es también cóncava hacia arriba.

   En el caso de que f fuese creciente, tendríamos que es cierto (Ejercicio 13 de la Relación 3). Por tanto, para encontrar un contraejemplo, necesitamos buscar una función decreciente y cóncava hacia arriba.

   Sea $f(x) = e^{-x}$. Tenemos que es estrictamente decreciente. Veamos ahora que es cóncava hacia arriba.

   $$f'(x) = -e^{-x} \qquad f''(x) = e^{-x} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, como $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que f es cóncava hacia arriba.

   Veamos ahora si $f \circ f$ es cóncava hacia arriba. Como tenemos que $(f \circ f) \in C^\infty(\mathbb{R})$, usamos el criterio de la segunda derivada.

   $$(f \circ f)'(x) = f'(f(x))f'(x) = -e^{-e^{-x}}(-e^{-x}) = e^{-e^{-x}}e^{-x} = e^{-e^{-x}-x}$$

   $$(f \circ f)''(x) = e^{-e^{-x}-x}(e^{-x} - 1)$$

   Para $x > 0$, tenemos que $(f \circ f)''(x) < 0$, por lo que $f \circ f$ es cóncava hacia abajo en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, el enunciado es **falso**.

2. Sean $f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ dos funciones uniformemente continuas. Entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.

   Tenemos que f es uniformemente continua; es decir:

   $$\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon}$$

   Tenemos que g es uniformemente continua; es decir:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\delta} > 0 \mid \text{Si } x, y \in B, \text{ con } |x - y| < \hat{\delta} \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

   En particular, tomando $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta}$, y usando que $f(A) \subset B$, la continuidad uniforme de g queda:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\varepsilon} > 0 \mid \text{Si } f(x), f(y) \in B, \text{ con } |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon} \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$$

   Uniendo lo que tenemos, queda:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \Longrightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| < \varepsilon$$

   Es decir, se ha demostrado que $g \circ f$ es uniformemente continua, por lo que es **cierto**.

3. Toda función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ uniformemente continua está acotada.

   Tomando $f(x) = x$, tenemos que es lipsitchziana por ser $f'(x) = 1$ acotada. Al ser f lipsitchziana, tenemos que f es uniformemente continua.

   No obstante, f no está acotada, por lo que el enunciado es **falso**.

4. Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.

   Por reducción al absurdo, supongamos que f no está acotada. Entonces,

$$\exists \{x_n\} \ (x_n \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \in \mathbb{N}) \mid \{|f(x_n)|\} \to +\infty$$

   Como f tiene límite en $+\infty$, se tiene que:

$$\forall \{x_n'\} \to +\infty \ (x_n' \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \{f(x_n')\} \to L \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ no diverge, por lo que está acotada.

$$\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Consideramos ahora $f_{]0,M[}$. Como f es uniformemente continua, transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Por tanto, $f(]0, M[)$ está acotado.

   Por tanto, tenemos que $f(x_n) \in f(]0, M[) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f(x_n)$ acotado. Pero como $\{|f(x_n)|\}$ diverge, llegamos a una contradicción.

   Por tanto, f está acotada.

   Observación. Tenemos que $\forall \{x_n\} \to +\infty$, tenemos que la imagen de la cola está acotada por $L + \varepsilon$, y que la imagen de los primeros términos, por ser un conjunto acotado y ser f uniformemente continua, también es uniformemente continua.

Ejercicio 3 (4 puntos). Definimos $G :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ como $G(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Calcular la imagen de G.

   Como el integrando es una función continua en el intervalo de definición, tenemos que es Riemman Integrable. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que es derivable en $]-1, 1[$ con derivada:

$$G'(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x = \frac{2x^5}{\sqrt{1-x^4}} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

   Por tanto, el único punto crítico es $x = 0$. Tenemos $G(0) = 0$. Además, como $\forall x^2 \in]0, 1[$ tenemos que la imagen del integrando es positiva, tenemos que $G(x) \geq 0 \ \forall x \in]-1, 1[$. Por tanto, se trata de un mínimo relativo. Al ser G continua y solo tener un punto que anula a la primera derivada, es también absoluto.

Calculamos las siguientes imágenes:

$$\lim_{x\to 1} G(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{b\to 1}\int_0^b \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} u = t \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos u\ du = dt \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}} \cos u\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u\ du$$

Por el intervalo empleado para el cambio de variable, tengo que $\cos u > 0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} G(x) = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos u} \cos u\ du = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \operatorname{sen}^2 u\ du = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{1-\cos(2t)}{2}\ du =$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{t-\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_0^b = \frac{\pi}{4}$$

Como además $G(-x) = G(x)$ por ser G una función par, tenemos que:

$$Im(G) = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$$

2. Decidir si tiene solución la ecuación $G(x) = \frac{1}{3}$. ¿Y la ecuación $G(x) = 2$?

   $G(x)$ es continua y definida en un intervalo. Tenemos que $Im(G) = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. Por tanto,

$$\exists x \in]-1,1[\mid G(x) = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \in Im(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow 4 < 3\pi \qquad \text{Cierto}$$

$$\exists x \in]-1,1[\mid G(x) = 2 \Longleftrightarrow 2 \in Im(G) \Longleftrightarrow 2 < \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow 8 < \pi \qquad \text{Falso}$$

Por tanto, tenemos que para la primera ecuación sí hay solución, pero para la segunda no.